

# Pewarnaan pada Graf $gshack(W_6, C_3, r)$ dan Peta Kabupaten Lumajang Menggunakan Algoritma *Welch Powell*

Mokhamad Saiful Hasan<sup>1</sup>, Ziaulhaq Fathulloh<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Akademi Komunitas Teknologi Syarifuddin Lumajang, Indonesia;  
[saifulhasanmtk@gmail.com](mailto:saifulhasanmtk@gmail.com)

<sup>2</sup> Akademi Komunitas Teknologi Syarifuddin Lumajang, Indonesia;  
[ziyaboy88@gmail.com](mailto:ziyaboy88@gmail.com)

IDAROTUNA: Jurnal  
Administrative Science Vol 3 No 2  
November 2022  
<https://doi.org/10.54471/idarotuna.v3i2.32>

Received: September 30, 2022

Accepted: October 17, 2022

Published: November 28, 2022

**Publisher's Note:** Program Study Office Administrative stays neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.



**Copyright:** © 2021 by the authors.  
Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

**Abstrak :** Suatu pekerjaan atau aktivitas akan memakan waktu yang lama dalam menyelesaikannya. Bahkan sering kali membuang waktu, tempat, tenaga, dan memperdayakan banyak pekerja yang tidak seharusnya. Semua itu bisa terjadi jika tidak mengoptimalkan perlakuan terhadap suatu pekerjaan tersebut. Salah satu aplikasi dari Teori Graf yang cukup terkenal dalam pengoptimalan adalah Pewarnaan. Pewarnaan dalam teori graf terdapat tiga macam, yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan daerah. Metode pada penelitian ini menggunakan metode studi literatur diawali menggambar graf, memberikan label pada titik graf. Melakukan pewarnaan, dimana teknik pewarnaan yang digunakan dalam pewarnaan graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  dan peta Kabupaten Lumajang adalah pewarnaan titik menggunakan algoritma *welch powell*. Algoritma *welch powell* digunakan untuk menentukan bilangan kromatik. Bilangan kromatik yaitu jumlah minimum dari warna yang diperlukan dalam pewarnaan pada titik graf. Pewarnaan pada graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  mendapatkan jumlah yang minimum yaitu 4. Pewarnaan pada peta Kabupaten Lumajang diperoleh jumlah warna yang minum yaitu juga 4 (merah, kuning, biru dan hijau).

**Kata Kunci:** Pewarnaan Graf, Pewarnaan Peta, dan Algoritma *Welch Powell*

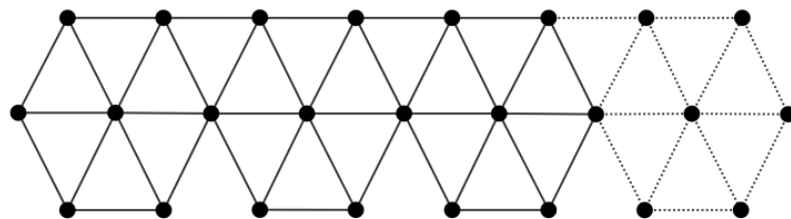
## 1. Pendahuluan

Teori Graf pertama kali dipopulerkan atau diperkenalkan pertama kali oleh Leonardo Euler seorang matematikawan yang berasal dari Swiss. Jembatan Königsberg dipresentasikan kedalam bentuk graf, dimana “jembatan” dimisalkan dalam bentuk “titik” graf dan “jalan” dimisalkan kedalam bentuk “sisi” graf (Nasir et al., 2022). Graf jika dipandang secara matematis dinotasikan  $G = (V, E)$ , dimana  $G$  adalah himpunan pasangan dari  $(V, E)$ , dengan  $V = V(G) = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$  merupakan himpunan titik yang tidak boleh kosong sedangkan  $E = E(G) = (e_1, e_2, e_3, \dots, e_m)$  himpunan sisi yang boleh kosong. Sehingga graf memungkinkan hanya berupa titik saja (Lestari & Umilasari, 2022).

Banyak titik  $V$  dalam graf  $G$  dinamakan *order* ( $p$ ) atau dinotasikan  $|V(G)|$  (Agustina et al., 2017). Sedangkan banyak sisi  $E$  dalam graf  $G$  disebut *size* ( $q$ ) atau dinotasikan  $|E(G)|$  (Agustin et al., 2021). Titik  $v$  yang terhubung oleh sisi  $e$  dengan titik yang lain disebut bertetangga (*adjacent*) (Putri, 2021). Banyak sisi  $e$  yang bersisian (*incident*) di dalam sebuah titik  $v$  disebut derajat (*degree*), dinotasikan  $d(v)$  (Wijayanti et al., 2018). Banyak sisi  $e$  yang bersisian (*incident*) di satu titik  $v$  dan merupakan yang terbanyak jika dibandingkan dengan jumlah pada titik  $e$  yang lain pada graf  $G$  disebut derajat terbesar, dinotasikan  $\Delta(G)$  (Agustin et al., 2016). Sedangkan jika sisi  $e$  yang bersisian (*incident*) di satu titik  $v$  dan merupakan yang paling sedikit jika dibandingkan dengan jumlah pada titik  $e$  yang lain pada graf  $G$  disebut derajat terkecil, dinotasikan  $\delta(G)$  (Kristiana et al., 2022).

Jalan ( $W(G)$ ) adalah sebuah barisan berhingga yang diawali dan diakhiri titik, dimana barisan tersebut berisikan titik dan sisi secara bergantian tanpa adanya syarat dalam pengulangan titik dan sisi (Febrianti et al., 2019). Sedangkan jalan dengan titik dan sisinya yang tidak berulang, dinamakan lintasan (*path*) pada graf  $G$  (Makalew et al., 2021). Sebuah graf  $G$  bisa dikatakan graf terhubung (*connected graph*) jika semua titik yang ada dalam graf  $G$  tersebut dihubungkan oleh sisi, jika ada paling sedikitnya satu titik yang tidak terhubung oleh sisi, maka graf tersebut dinamakan graf tak-terhubung (*disconnected graph*) (Hasan, 2015).

Graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  merupakan graf baru yang diperoleh dari pengoperasian graf yaitu *Generalized Shackle*. Dimana graf yang dioperasikan adalah graf Roda (*Wheel Graph*)  $W_6$  dengan penghubungnya Graf Siklus (*Cycle Graph*) serta digandakan sebanyak  $r$  (Hasan, 2015). Contoh Graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1.1 Contoh Graf  $gshack(W_6, C_3, r)$ .

Kabupaten Lumajang terdiri dari 21 kecamatan, diantaranya: Kecamatan Tempursari; Kecamatan Pronojiwo; Kecamatan Candipuro; Kecamatan Pasirian; Kecamatan Tempeh; Kecamatan Lumajang; Kecamatan Sumbersuko; Kecamatan Tekung; Kecamatan Kunir; Kecamatan Yosowilangun; Kecamatan Rowokangkung; Kecamatan Jatiroto; Kecamatan Randuagung; Kecamatan Sukodono; Kecamatan Padang; Kecamatan Pasrujambe; Kecamatan Senduro; Kecamatan Gucilait; Kecamatan Kedungjajang; Kecamatan Klakah; Kecamatan Ranuyoso (sumber: LPPD, 2019).



**Gambar 1.2** Peta Kabupaten Lumajang (sumber: LPPD, 2019).

Pewarnaan pada graf terdapat tiga pewarnaan, yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi dan pewarnaan daerah. Pewarnaan titik pada graf  $G$  adalah memberikan warna pada semua titik yang ada di graf  $G$ , sedemikian hingga tidak ada warna yang sama pada titik yang bertetangga (*adjacent*). Warna yang dimiliki titik  $v$ , dinotasikan dengan  $c(v)$ . Jumlah minimum warna yang digunakan dalam pewarnaan graf  $G$  disebut bilangan kromatik, dinotasikan  $\chi(G)$  (Retnoningsih, 2022).

Algoritma *welch powell* adalah salah satu algoritma yang digunakan dalam pewarnaan titik graf untuk mengetahui jumlah warna minimum dalam pewarnaan graf (Monim et al., 2022). Algoritma *welch powell* memulai pewarnaannya dari titik yang memiliki derajat paling besar yang dinamakan dengan metode *Largest Degree Ordering* (LDO). Algoritma ini cukup efisien dalam mewarnai sebuah graf, tetapi algoritma *welch powell* hanya lebih tepat digunakan ketika suatu graf memiliki order yang cenderung kecil (Ammar, 2019). Tahapan pewarnaan graf dengan algoritma *welch powell* adalah: tahap pertama berikan label pada semua titik pada graf, misalkan  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ ; tahap ke-dua berikan sebarang warna pada titik yang memiliki derajat terbesar; tahap ke-tiga berikan warna yang sama pada semua titik yang tidak bertetangga (*adjacent*) dengan titik yang berderajat terbesar; tahap

ke-empat apabila ditemukan warna sama pada titik yang bertetangga maka salah satu warna pada titik tersebut harus dihapus sehingga tidak ada lagi titik bertetangga dengan warna yang sama; tahap ke-lima ulangi tahap ke-dua sampai ke-empat untuk pewarnaan pada titik berderajat tinggi berikutnya, sehingga semua titik pada graf memiliki warna (Lestari & Umilasari, 2022).

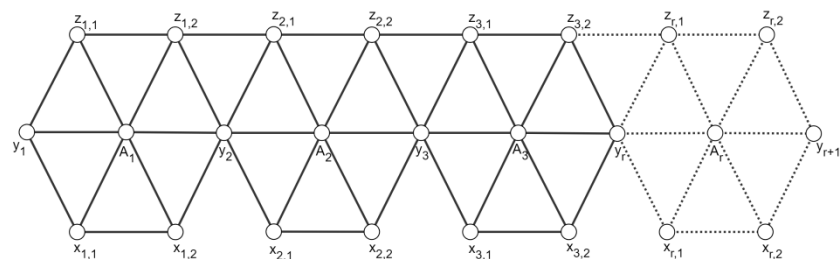
Pewarnaan pada peta Kabupaten Lumajang bertujuan guna mempermudah membaca peta dalam membedakan tiap wilayah kecamatan (Firmansyah et al., 2022). Satu cara untuk menjamin bahwa dua kecamatan tidak memiliki warna sama maka menggunakan warna yang berbeda untuk tiap kecamatan. Sehingga kecamatan yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama (Ammar, 2019).

## 2. Hasil dan Diskusi

Penelitian ini menghasilkan dua pewarnaan, yaitu yang pertama pewarnaan pada Graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  sehingga diperoleh Teroma baru atas pewarnaan Graf  $gshack(W_6, C_3, r)$ , hasil yang kedua adalah pewarnaan dengan warna yang minimum pada peta Kabupaten Lumajang.

### 2.1. Pewarnaan pada Graf $gshack(W_6, C_3, r)$

Langkah pertama untuk memulai pewarnaan adalah dengan memberikan label pada seluruh titik pada graf  $gshack(W_6, C_3, r)$ . Gambar 2.1 menunjukkan graf  $gshack(W_6, C_3, r)$ , dimana  $r$  adalah banyaknya graf yang akan digambar, tetapi masih dalam batasan berhingga.



**Gambar 2.1** Graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  Sudah Diberikan Label.

Langkah selanjutnya adalah mendaftarkan titik-titik yang ada dalam graf, yaitu mendaftarkan derajat serta mengurutkan dari derajat terbesar ke derajat terkecil.

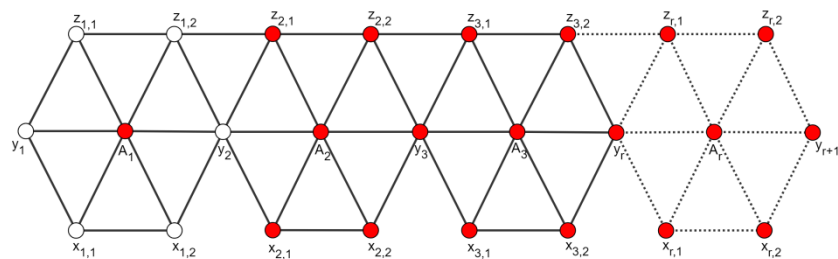
**Tabel 2.1** Daftar derajat serta diurut dari derajat terbesar ke derajat terkecil.

| No. | Titik                        | Derajat |
|-----|------------------------------|---------|
| 1   | $A_i; 1 \leq i \leq r$       | 6       |
| 2   | $y_i; 2 \leq i \leq r$       | 6       |
| 3   | $z_{i,2}; 1 \leq i \leq r-1$ | 4       |

|   |                                             |   |
|---|---------------------------------------------|---|
| 4 | $z_{i,1}; 2 \leq i \leq r$                  | 4 |
| 5 | $x_{i,j}; 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq 2$ | 3 |
| 6 | $y_1$                                       | 3 |
| 7 | $y_{r+1}$                                   | 3 |
| 8 | $z_{1,1}$                                   | 3 |
| 9 | $z_{r,2}$                                   | 3 |

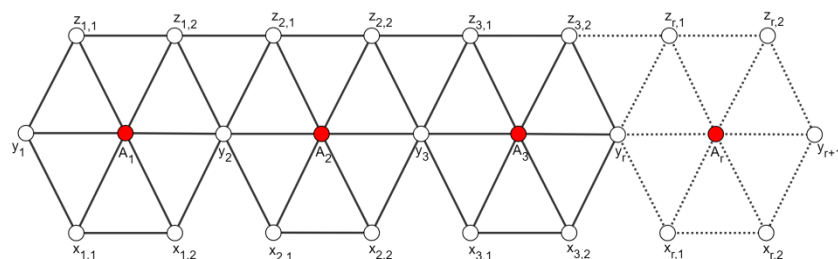
### 2.1.1. Titik Berderajat Terbesar Pertama

Dimulai dari tahap ke-dua, berikan sebarang warna misal merah pada titik yang memiliki derajat terbesar, pada graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  ini dipilih titik  $A_1$  sebagai titik berderajat terbesar pertama. Dilanjut tahap ke-tiga, berikan warna yang sama pada semua titik yang tidak bertetangga (*adjacent*) dengan titik yang berderajat terbesar  $A_1$ . Sehingga diperoleh pewarnaan seperti pada Gambar 2.2.



**Gambar 2.2** Graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  Sudah Diberikan Warna Merah pada Derajat Terbesar dan yang Tidak Bertetangga dengan Derajat Terbesar Juga Diberikan Warna Merah, Tetapi Masih Terdapat Warna Sama di Titik yang Bertetangga.

Tahap ke-empat ditemukan banyak warna sama pada titik yang bertetangga, maka salah satu warna pada titik tersebut harus dihapus, sehingga tidak ada lagi titik bertetangga dengan warna yang sama. Sehingga diperoleh pewarnaan seperti pada Gambar 2.3.

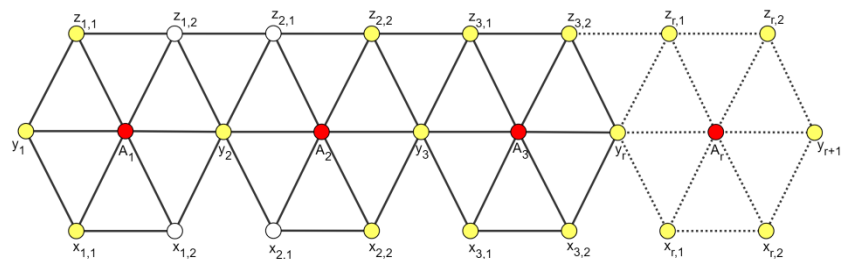


**Gambar 2.3** Graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  Sudah Diberikan Warna Merah pada Derajat Terbesar dan yang Tidak Bertetangga dengan Derajat Terbesar

Juga Diberikan Warna Merah, Tetapi Sudah Tidak Ada Warna Sama di Titik yang Bertetangga.

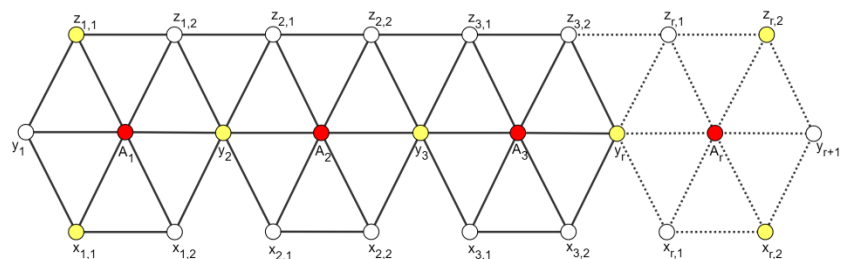
### 2.1.2. Titik Berderajat Terbesar Kedua

Ulangi tahap ke-dua untuk titik berderajat terbesar berikutnya, berikan sebarang warna misal kuning pada titik yang memiliki derajat terbesar kedua. Pada graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  ini dipilih titik  $y_2$  sebagai titik berderajat terbesar kedua. Dilanjut tahap ke-tiga, berikan warna yang sama pada semua titik yang tidak bertetangga (*adjacent*) dengan titik yang berderajat terbesar kedua  $y_2$ . Sehingga diperoleh pewarnaan seperti pada Gambar 2.4.



**Gambar 2.4** Graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  Sudah Diberikan Warna Merah dan Kuning, Tetapi Ada Warna Sama di Titik yang Bertetangga.

Tahap ke-empat ditemukan banyak warna sama pada titik yang bertetangga, maka salah satu warna pada titik tersebut harus dihapus, sehingga tidak ada lagi titik bertetangga dengan warna yang sama. Sehingga diperoleh pewarnaan seperti pada Gambar 2.5.

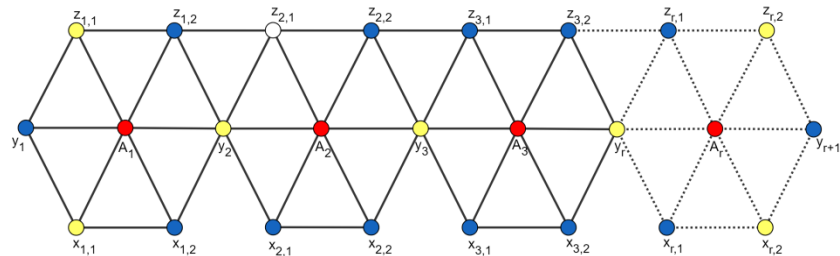


**Gambar 2.5** Graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  Sudah Diberikan Warna Merah dan Kuning, Serta Tidak Ada Warna Sama di Titik yang Bertetangga.

### 2.1.3. Titik Berderajat Terbesar Ketiga

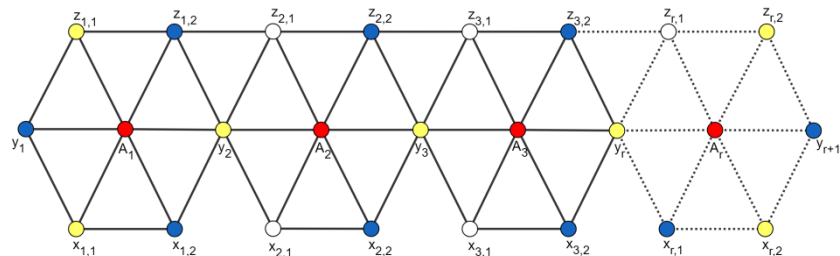
Ulangi tahap ke-dua untuk titik berderajat terbesar berikutnya, berikan sebarang warna misal biru pada titik yang memiliki derajat terbesar ketiga. Pada graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  ini dipilih titik  $z_{1,2}$  sebagai titik berderajat terbesar ketiga. Dilanjut tahap ke-tiga, berikan warna

yang sama pada semua titik yang tidak bertetangga (*adjacent*) dengan titik yang berderajat terbesar ketiga  $z_{1,2}$ . Sehingga diperoleh pewarnaan seperti pada Gambar 2.6.



**Gambar 2.6** Graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  Sudah Diberikan Warna Merah, Kuning dan Biru Tetapi Ada Warna Sama di Titik yang Bertetangga.

Tahap ke-empat ditemukan banyak warna sama pada titik yang bertetangga, maka salah satu warna pada titik tersebut harus dihapus, sehingga tidak ada lagi titik bertetangga dengan warna yang sama. Sehingga diperoleh pewarnaan seperti pada Gambar 2.7.

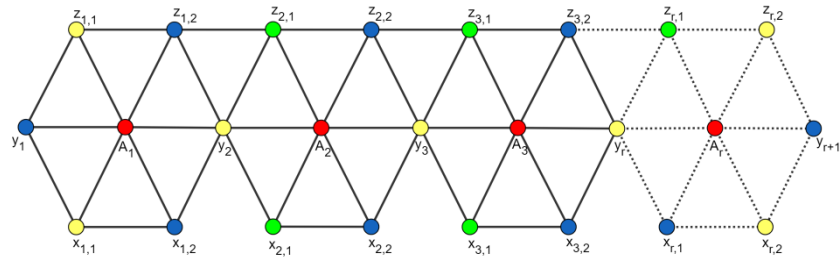


**Gambar 2.7** Graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  Sudah Diberikan Warna Merah, Kuning dan Biru, Serta Tidak Ada Warna Sama di Titik yang Bertetangga.

#### 2.1.4. Titik Berderajat Terbesar Keempat

Ulangi tahap ke-dua untuk titik berderajat terbesar berikutnya, berikan sebarang warna misal hijau pada titik yang memiliki derajat terbesar keempat. Pada graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  ini dipilih titik  $z_{2,1}$  sebagai titik berderajat terbesar keempat. Dilanjut tahap ke-tiga, berikan warna yang sama pada semua titik yang tidak bertetangga (*adjacent*) dengan titik yang berderajat terbesar ketiga  $z_{2,1}$ . Sehingga diperoleh pewarnaan seperti pada Gambar 2.8.





**Gambar 2.8** Graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  Sudah Diberikan Warna Merah, Kuning, Biru dan Hijau, Serta Tidak Ada Warna Sama di Titik yang Bertetangga.

Pewarnaan telah selesai untuk graf  $gshack(W_6, C_3, r)$ , dimana warna yang dibutuhkan cukup 4 warna saja (merah, kuning, biru dan hijau) dan tidak ada warna sama pada titik yang bertetangga. Sehingga tidak diperlukan ketahap berikutnya.

**Teorema 2.1** Bilangan kromatik graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  dengan  $r \geq 2$ , adalah  $\chi(gshack(W_6, C_3, r)) = 4$ .

**Bukti.** Graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  adalah graf terhubung dengan himpunan titik  $V(gshack(W_6, C_3, r)) = \{A_i; 1 \leq i \leq r\} \cup \{x_{i,j}, z_{i,j}; 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq 2\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq r+1\}$  dan memiliki himpunan sisi  $E(gshack(W_6, C_3, r)) = \{x_{i,1}x_{i,2}; 1 \leq i \leq r\} \cup \{x_{i,1}y_i, z_{i,1}y_i; 1 \leq i \leq r\} \cup \{x_{i,2}y_{i+1}, z_{i,2}y_{i+1}; 1 \leq i \leq r\} \cup \{z_{i,1}z_{i,2}; 1 \leq i \leq r\} \cup \{z_{i,2}z_{i+1,1}; 1 \leq i \leq r-1\} \cup \{A_i x_{i,j}, A_i y_i, A_i y_{i+1}, A_i z_{i,j}; 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq 2\}$ . Sehingga graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  memiliki order dan size yaitu  $|V(gshack(W_6, C_3, r))| = 6r + 1$  dan  $|E(gshack(W_6, C_3, r))| = 13r - 1$ . Graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  adalah graf yang memiliki satu titik pusat  $A$  di setiap pengulangan  $r$  yang saling bertetangga dengan setiap titik yang lainnya diposisi  $r$  tersebut, sehingga titik pusat  $A$  harus berwarna beda dengan setiap titik lain yang bertetangga. Sehingga fungsi pewarnaan pada titik pada graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned} c(A_i) &= 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq r \\ c(z_{1,1}) = c(x_{1,1}) = c(z_{r,2}) = c(x_{r,2}) &= 2 \\ c(y_i) &= 2, \text{ untuk } 2 \leq i \leq r \\ c(y_1) = c(y_{r+1}) = c(x_{r,1}) &= 3 \\ c(z_{i,2}) = c(x_{i,2}) &= 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq r-1 \\ c(x_{i,1}) &= 4, \text{ untuk } 2 \leq i \leq r-1 \\ c(z_{i,1}) &= 4, \text{ untuk } 2 \leq i \leq r \end{aligned}$$

Terbukti jika bilangan kromatik pada graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  dengan  $r \geq 2$ , adalah  $\chi(gshack(W_6, C_3, r)) = 4$ .  $\square$

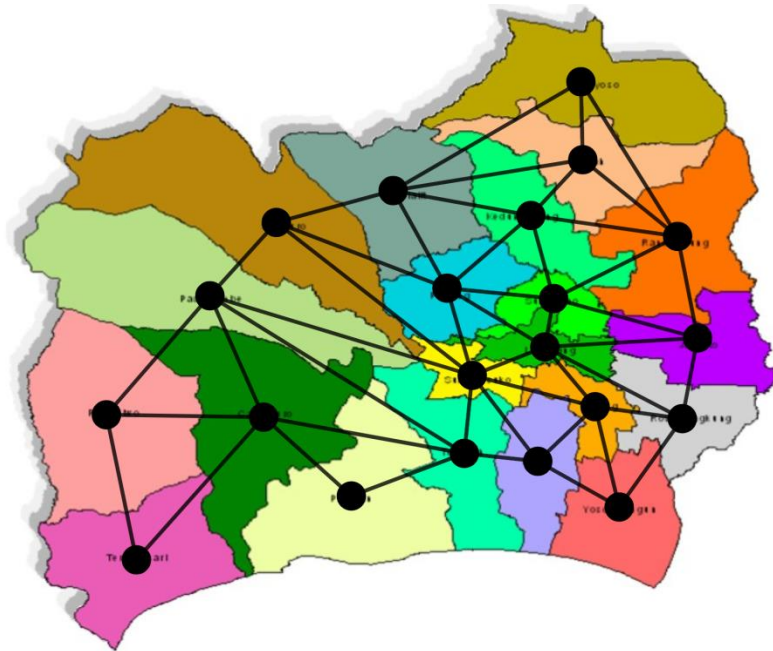
Pewarnaan graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  menggunakan algoritma *welch powell* bisa menghasilkan warna minimum dalam penerapan warnanya, yaitu cukup 4 warna saja (merah, kuning, biru dan hijau). Graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  memiliki order  $|V(gshack(W_6, C_3, r))| = 6r + 1$



(Hasan, 2015). Order (banyaknya titik) dari graf ini cenderung banyak, tetapi masih bisa melakukan pewarnaan menggunakan algoritma *welch powell* dikarenakan titik pada graf ini bergerak secara teratur.

## 2.2. Pewarnaan pada Peta Kabupaten Lumajang

Langkah pertama untuk memulai pewarnaan adalah dengan mempresentasikan peta Kabupaten Lumajang kedalam bentuk graf. Kumpulan atau himpunan kecamatan yang berada di Kabupaten Lumajang dipresentasikan sebagai himpunan titik graf. Hubungan ketetanggaan antar kecamatan dipresentasikan menjadi himpunan sisi graf. Gambar 2.9 menunjukkan graf baru hasil dari mempresentasikan peta Kabupaten Lumajang kedalam bentuk graf.



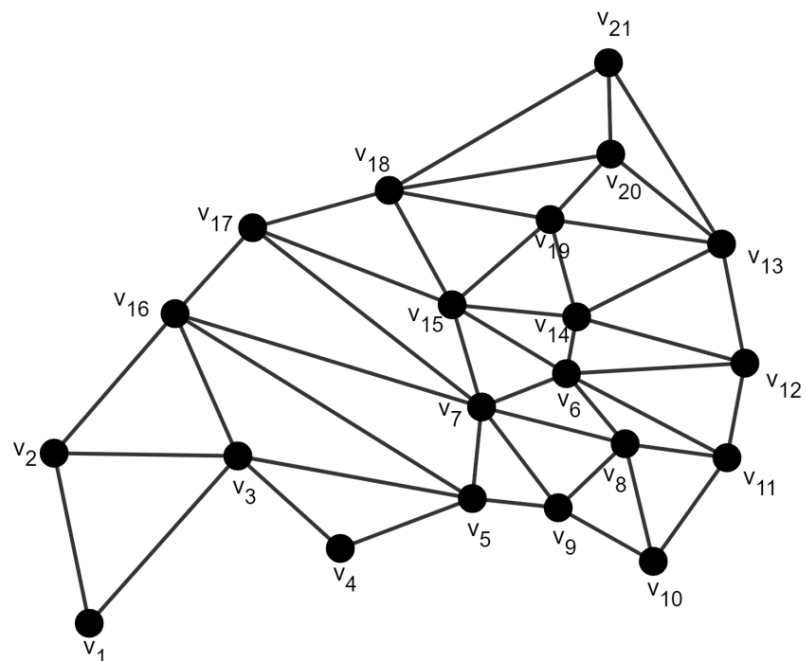
**Gambar 2.9** Hasil Representasi Peta Kabupaten Lumajang ke Bentuk Graf.

Langkah selanjutnya, agar lebih mudah dalam pewarnaan maka nama kecamatan digantikan dengan label seperti pada tabel 2.2 sekaligus juga tersedia daftar derajat setiap titik. Gambar 2.10 merupakan graf yang sudah diberikan label.

**Tabel 2.2** Label setiap kecamatan dan jumlah derajat

| No. | Nama Kecamatan | Label | Derajat |
|-----|----------------|-------|---------|
| 1   | Tempursari     | $v_1$ | 2       |
| 2   | Pronojiwo      | $v_2$ | 3       |
| 3   | Candipuro      | $v_3$ | 5       |
| 4   | Pasirian       | $v_4$ | 2       |
| 5   | Tempeh         | $v_5$ | 5       |
| 6   | Lumajang       | $v_6$ | 6       |
| 7   | Sumbersuko     | $v_7$ | 7       |

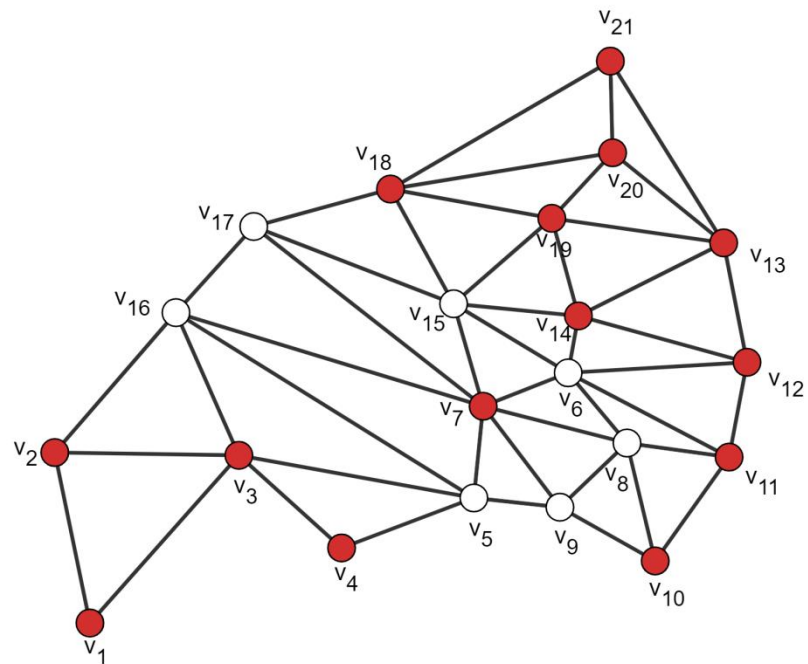
|    |              |          |   |
|----|--------------|----------|---|
| 8  | Tekung       | $v_8$    | 5 |
| 9  | Kunir        | $v_9$    | 4 |
| 10 | Yosowilangun | $v_{10}$ | 3 |
| 11 | Rowokangkung | $v_{11}$ | 4 |
| 12 | Jatiroto     | $v_{12}$ | 4 |
| 13 | Randuagung   | $v_{13}$ | 5 |
| 14 | Sukodono     | $v_{14}$ | 5 |
| 15 | Padang       | $v_{15}$ | 6 |
| 16 | Pasrujambe   | $v_{16}$ | 5 |
| 17 | Senduro      | $v_{17}$ | 4 |
| 18 | Gucilait     | $v_{18}$ | 5 |
| 19 | Kedungjajang | $v_{19}$ | 5 |
| 20 | Klakah       | $v_{20}$ | 4 |
| 21 | Ranuyoso     | $v_{21}$ | 3 |



**Gambar 2.10** Hasil Representasi Peta Kabupaten Lumajang ke Bentuk Graf.

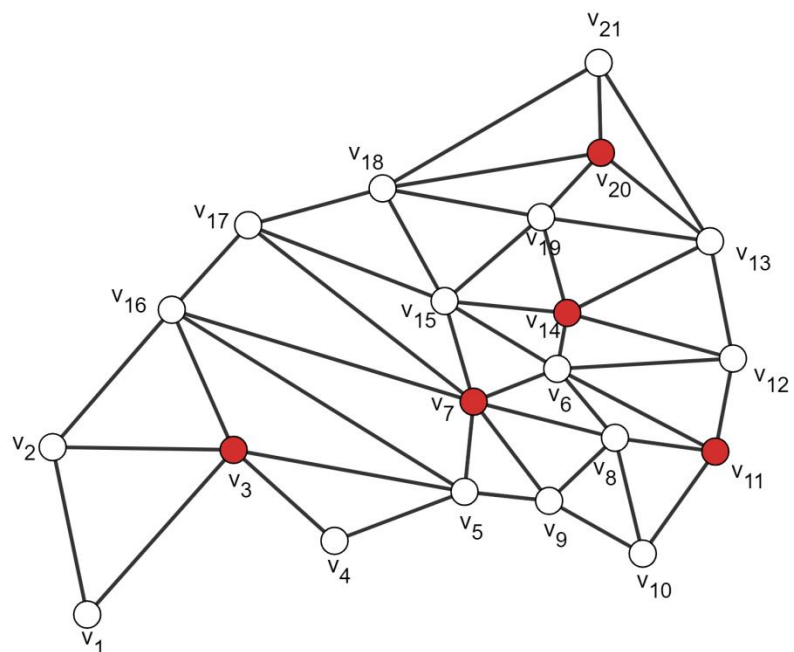
#### 2.2.1. Titik Berderajat Terbesar Pertama

Sama halnya dengan pewarnaan sebelumnya, dimulai dari tahap ke-dua. Berikan sebarang warna misal merah pada titik yang memiliki derajat terbesar pada graf, yaitu titik  $v_7$  sebagai titik berderajat terbesar pertama. Dilanjut tahap ke-tiga, berikan warna yang sama pada semua titik yang tidak bertetangga (*adjacent*) dengan titik yang berderajat terbesar  $v_7$ . Sehingga diperoleh pewarnaan seperti pada Gambar 2.11.



**Gambar 2.11** Graf Peta Kabupaten Lumajang Sudah Diberikan Warna Merah pada Derajat Terbesar dan yang Tidak Bertetangga dengan Derajat Terbesar Juga Diberikan Warna Merah, Tetapi Masih Terdapat Warna Sama di Titik yang Bertetangga.

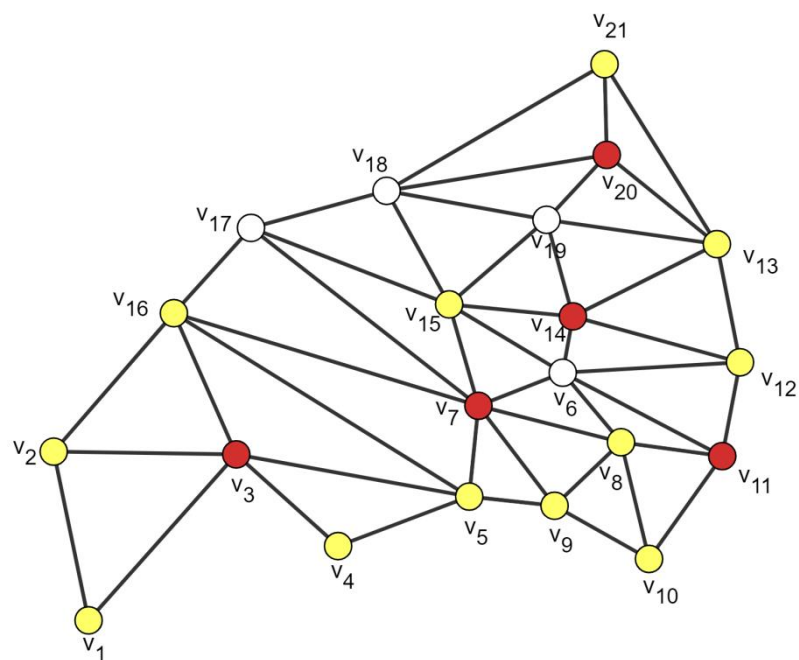
Tahap ke-empat ditemukan banyak warna sama pada titik yang bertetangga, maka salah satu warna pada titik tersebut harus dihapus, sehingga tidak ada lagi titik bertetangga dengan warna yang sama. Sehingga diperoleh pewarnaan seperti pada Gambar 2.12.



**Gambar 2.12** Graf Peta Kabupaten Lumajang Sudah Diberikan Warna Merah pada Derajat Terbesar dan yang Tidak Bertetangga dengan Derajat Terbesar Juga Diberikan Warna Merah, Tetapi Sudah Tidak Ada Warna Sama di Titik yang Bertetangga.

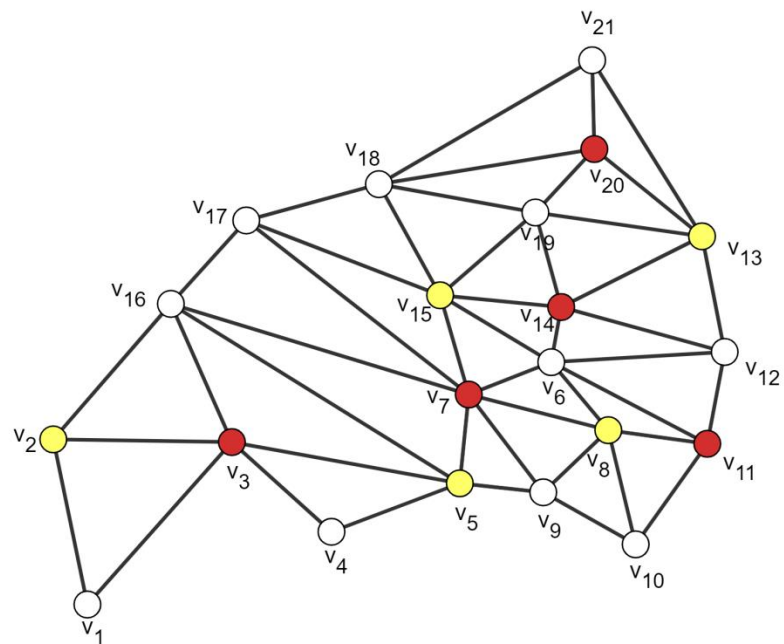
#### 2.2.2. Titik Berderajat Terbesar Kedua

Ulangi tahap ke-dua untuk titik berderajat terbesar berikutnya, berikan sebarang warna misal kuning pada titik yang memiliki derajat terbesar kedua. Pada graf ini dipilih titik  $v_{15}$  sebagai titik berderajat terbesar kedua. Dilanjut tahap ke-tiga, berikan warna yang sama pada semua titik yang tidak bertetangga (*adjacent*) dengan titik yang berderajat terbesar kedua  $v_{15}$ . Sehingga diperoleh pewarnaan seperti pada Gambar 2.13.



**Gambar 2.13** Graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  Sudah Diberikan Warna Merah dan Kuning, Tetapi Ada Warna Sama di Titik yang Bertetangga.

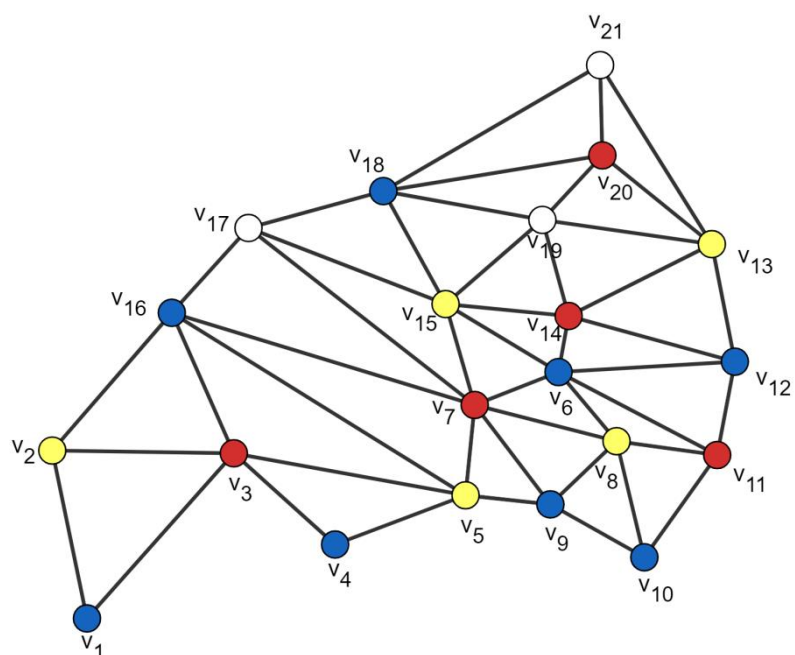
Tahap ke-empat ditemukan banyak warna sama pada titik yang bertetangga, maka salah satu warna pada titik tersebut harus dihapus, sehingga tidak ada lagi titik bertetangga dengan warna yang sama. Sehingga diperoleh pewarnaan seperti pada Gambar 2.14.



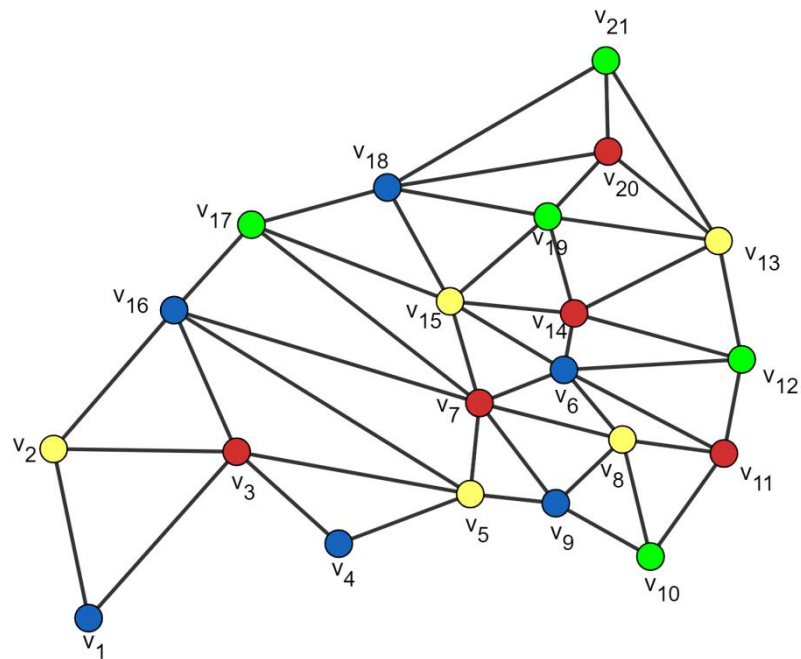
**Gambar 2.14** Graf Peta Kabupaten Lumajang Sudah Diberikan Warna Merah dan Kuning, Serta Tidak Ada Warna Sama di Titik yang Bertetangga.

### 2.2.3. Titik Berderajat Terbesar Ketiga

Ulangi tahap ke-dua untuk titik berderajat terbesar berikutnya, berikan sebarang warna misal biru pada titik yang memiliki derajat terbesar ketiga. Pada graf ini dipilih titik  $v_{18}$  sebagai titik berderajat terbesar ketiga. Dilanjut tahap ke-tiga, berikan warna yang sama pada semua titik yang tidak bertetangga (*adjacent*) dengan titik yang berderajat terbesar ketiga  $v_{18}$ . Sehingga diperoleh pewarnaan seperti pada Gambar 2.15.







**Gambar 2.17** Graf Peta Kabupaten Lumajang Sudah Diberikan Warna Merah, Kuning, Biru dan Hijau, Serta Tidak Ada Warna Sama di Titik yang Bertetangga.

Pewarnaan telah selesai untuk graf Peta Kabupaten Lumajang, dimana warna yang dibutuhkan cukup 4 warna saja (merah, kuning, biru dan hijau) dan tidak ada warna sama pada titik yang bertetangga. Sehingga tidak diperlukan ketahap berikutnya. Pewarnaan graf Peta Kabupaten Lumajang menggunakan algoritma *welch powell* bisa menghasilkan warna minimum dalam penerapan warnanya, yaitu cukup 4 warna saja (merah, kuning, biru dan hijau). Nama kecamatan beserta warna yang dimiliki kecamatan tersebut, disajikan pada Tabel 2.3.

**Tabel 2.3** Warna setiap kecamatan

| No. | Nama Kecamatan | Label    | Warna  |
|-----|----------------|----------|--------|
| 1   | Tempursari     | $v_1$    | Biru   |
| 2   | Pronojiwo      | $v_2$    | Kuning |
| 3   | Candipuro      | $v_3$    | Merah  |
| 4   | Pasirian       | $v_4$    | Biru   |
| 5   | Tempeh         | $v_5$    | Kuning |
| 6   | Lumajang       | $v_6$    | Biru   |
| 7   | Sumbersuko     | $v_7$    | Merah  |
| 8   | Tekung         | $v_8$    | Kuning |
| 9   | Kunir          | $v_9$    | Biru   |
| 10  | Yosowilangun   | $v_{10}$ | Hijau  |



|    |              |          |        |
|----|--------------|----------|--------|
| 11 | Rowokangkung | $v_{11}$ | Merah  |
| 12 | Jatiroto     | $v_{12}$ | Hijau  |
| 13 | Randuagung   | $v_{13}$ | Kuning |
| 14 | Sukodono     | $v_{14}$ | Merah  |
| 15 | Padang       | $v_{15}$ | Kuning |
| 16 | Pasrujambe   | $v_{16}$ | Biru   |
| 17 | Senduro      | $v_{17}$ | Hijau  |
| 18 | Gucilait     | $v_{18}$ | Biru   |
| 19 | Kedungjajang | $v_{19}$ | Hijau  |
| 20 | Klakah       | $v_{20}$ | Merah  |
| 21 | Ranuyoso     | $v_{21}$ | Hijau  |

### 3. Bahan dan Metode

Metode pada penelitian ini menggunakan metode studi literatur (Noor et al., 2021). Prosedur pewarnaan graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  sebagai berikut: diawali mencari kajian serta analisa untuk mempelajari definisi pewarnaan graf; menggambar graf  $gshack(W_6, C_3, r)$ ; menentukan label titik dan sisi dari graf  $gshack(W_6, C_3, r)$ ; menentukan fungsi titik dan sisi serta mendefinisikannya dari graf  $gshack(W_6, C_3, r)$ ; melakukan pewarnaan, dimana teknik pewarnaan yang digunakan dalam pewarnaan graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  adalah pewarnaan titik menggunakan algoritma *welch powell*, algoritma *welch powell* digunakan untuk menentukan bilangan kromatik; menemukan teorema dalam pelabelan pewarnaan graf  $gshack(W_6, C_3, r)$ ; pembuktian terhadap teorema pewarnaan graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  (Amri et al., 2018).

Prosedur pewarnaan pada graf Kabupaten Lumajang sebagai berikut: diawali mencari kajian serta analisa untuk mempelajari definisi pewarnaan graf; mempresentasikan peta Kabupaten Lumajang kedalam bentuk garf; menentukan label titik dari graf baru yaitu graf peta Kabupaten Lumajang; melakukan pewarnaan, dimana teknik pewarnaan yang digunakan dalam pewarnaan graf peta Kabupaten Lumajang adalah pewarnaan titik menggunakan algoritma *welch powell*, algoritma *welch powell* digunakan untuk menentukan bilangan kromatik; menemukan bilangan kromatik, yaitu bilangan minimal dalam pemberian warna pada graf peta Kabupaten Lumajang; mendapatkan kesimpulan dalam pewarnaan peta Kabupaten Lumajang (Bustan & Salim, 2019).

### 4. Kesimpulan

Pewarnaan graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  menggunakan algoritma *welch powell* menghasilkan warna minimum dalam penerapan warnanya, yaitu cukup 4 warna saja (merah, kuning, biru dan hijau). Graf  $gshack(W_6, C_3, r)$  memiliki order  $|V(gshack(W_6, C_3, r))| = 6r + 1$ . Order (banyaknya titik) dari graf ini cenderung banyak, tetapi masih bisa melakukan pewarnaan menggunakan algoritma *welch powell* dikarenakan titik pada graf ini bergerak secara teratur.

Pewarnaan pada peta Kabupaten Lumajang menggunakan algoritma *welch powell* menghasilkan 4 warna (merah, kuning, biru dan hijau), dengan rincian sebagai berikut. Merah: Kecamatan Candipuro, Kecamatan Sumbersuko, Kecamatan Rowokangkung, Kecamatan

Sukodono dan Kecamatan Klakah. Kuning: Kecamatan Pronojiwo, Kecamatan Tempeh, Kecamatan Tekung, Kecamatan Randuagung dan Kecamatan Padang. Biru: Kecamatan Tempursari, Kecamatan Pasirian, Kecamatan Lumajang, Kecamatan Kunir, Kecamatan Pasrujambe dan Kecamatan Gucialit. Hijau: Kecamatan Yosowilangun, Kecamatan Jatiroto, Kecamatan Senduro, Kecamatan Kedungjajang dan Kecamatan Ranuyoso.

## Referensi

- Agustin, I. H., Dafik, D., & Harsya, A. Y. (2016). On r-dynamic coloring of some graph operations. *Indonesian Journal of Combinatorics*, 1(1), 22-30. <http://www.ijc.or.id/index.php/ijc/article/view/5/4>. [diakses pada 27 November 2022].
- Agustin, I. H., Retnowardani, D. A., & Kurniawati, E. Y. (2021). On the resolving strong domination number of graphs: a new notion. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1836, No. 1, p. 012019). IOP Publishing. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1836/1/012019/pdf>. [diakses pada 23 November 2022].
- Agustina, M., Dafik, D., Slamini, S., & Kusbudiono, K. (2017). On the Rainbow Vertex Connection Number of Edge Comb of Some Graph. *UNEJ e-Proceeding*, 340-342. <https://jurnal.unej.ac.id/index.php/prosiding/article/view/5165/3906>. [diakses pada 27 November 2022].
- Ammar, M. (2019). Implementasi Algoritma Sequential dan Welch Powell phsada Pewarnaan Graf (Studi Kasus Pewarnaan Peta Kota Makassar). *Jurnal Varian*, 3(1). <https://journal.universitasbumigora.ac.id/index.php/Varian/article/view/488/375>. [diakses pada 15 November 2022].
- Amri, Z., Aulia, A., Syella, A., Pratamal, H., & Ramadhani, S. (2018). PELABELAN HARMONIS GANJIL PADA GRAF  $2S_n [(C)_4, n]$ . *EduTech: Jurnal Ilmu Pendidikan dan Ilmu Sosial*, 4(1). <http://jurnal.umsu.ac.id/index.php/edutech/article/view/1952/2014>. [diakses pada 27 November 2022].
- Bustan, A. W., & Salim, M. R. (2019). Penerapan Pewarnaan Graf Menggunakan Algoritma Welch Powell untuk Menentukan Jadwal Bimbingan Mahasiswa. *Jurnal THEOREMS (The Original Research of Mathematics)*, 4(1), 79-86. <https://core.ac.uk/download/pdf/228883523.pdf>. [diakses pada 27 November 2022].
- Febrianti, F., Yulianti, L., & Narwen, N. (2019). Dimensi Metrik Pada Graf Amalgamasi Tangga Segitiga Diperumum Homogen. *Jurnal Matematika UNAND*, 8(1), 84-90. <http://jmua.fmipa.unand.ac.id/index.php/jmua/article/view/411/397>. [diakses pada 27 November 2022].
- Firmansyah, F. dkk. (2022). Kerangka Aktivitas Pembelajaran Berbasis Riset dengan Pendekatan STEM: Penerapan Teknik Pewarnaan Graf Sederhana untuk Meningkatkan Metaliterasi Siswa dalam Mengembangkan Desain Wallpaper Dinding. Ebook CGANT Universitas Jember. <http://ebook-cgantunej.or.id/index.php/cgant/article/view/15/30>. [diakses pada 15 November 2022].
- Hasan, M. S. (2015). Analisa Rainbow Connection dan Strong Rainbow Connection pada Graf Hasil Operasi. *Skripsi*. Jurusan Matematika, FMIPA: UNEJ. <https://ppid.lumajangkab.go.id/file/LPPD-TAHUN-2019-KABUPATEN-LUMAJANG-PROVINSI-JAWA-TIMURpdf1586395255.pdf>. [diakses pada 20 November 2022].
- Kristiana, A. I. dkk. (2022). On the r-Dynamic Chromatic Number of Corona Product of Star Graph. *Thai Journal of Mathematics*, 20(3), 1389-1397. [https://repository.unej.ac.id/xmlui/bitstream/handle/123456789/110254/FKIP\\_JURNAL\\_ArikaIndah\\_On%20the%20r-Dynamic%20Chromatic%20Numberof%20Corona%20Product%20of%20Star%20Graph.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://repository.unej.ac.id/xmlui/bitstream/handle/123456789/110254/FKIP_JURNAL_ArikaIndah_On%20the%20r-Dynamic%20Chromatic%20Numberof%20Corona%20Product%20of%20Star%20Graph.pdf?sequence=1&isAllowed=y). [diakses pada 15 November 2022].
- Lestari, I. L., & Umilasari, R. (2022). Aplikasi Pewarnaan Graf untuk Menentukan Jadwal Ujian Skripsi di Prodi Pendidikan Matematika ITSNU Pasuruan. *Center of Education Journal (CEJou)*, 3(2), 27-35. <https://journal.itsnupasuruan.ac.id/index.php/cejou/article/view/162/125>. [diakses pada 15 November 2022].
- Makalew, R. A. M., Montolalu, C. E., & Mananohas, M. L. (2021). Lintasan Hamiltonian pada Graf 4-Connected. *d'CARTESIAN: Jurnal Matematika dan Aplikasi*, 9(2), 181-188.

- <https://ejournal.unsrat.ac.id/index.php/decartesian/article/view/29735/30314>. [diakses pada 27 November 2022].
- Monim, H. O., Widjajanti, T. W. T., & Sesa, J. (2022, May). Aplikasi Pewarnaan Graf dalam Penentuan Distrik yang Strategis di Kabupaten Manokwari dengan Algoritma Welch Powell. In Prosiding Seminar Nasional MIPA UNIPA (pp. 126-141). <https://prosiding.fmipa.unipa.ac.id/index.php/SNMIPAUNIPA/article/view/18/16>. [diakses pada 15 November 2022].
- Nasir, A. M., & Setyawan, D. (2022). Optimalisasi Penjadwalan Mata Kuliah Menggunakan Teori Pewarnaan Graf. *Proximal: Jurnal Penelitian Matematika Dan Pendidikan Matematika*, 5(1), 57-69. <https://www.e-journal.my.id/proximal/article/view/1398/proximal.v5i1.1398.g1297>. [diakses pada 15 November 2022].
- Noor, C. A. P., Yahya, L., Nasib, S. K., & Yahya, N. I. (2021). BILANGAN TERHUBUNG PELANGI PADA GRAF SALJU ( $S_n$ ). *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, 4(1), 29-44. <https://ejournal2.undip.ac.id/index.php/jfma/article/view/9035/5995>. [diakses pada 27 November 2022].
- Putri, Lucia Devita. (2021). Penerapan Pewarnaan Graf Menggunakan Algoritma Welch Powell dengan Pemrograman Python untuk Menyusun Jadwal Mata Pelajaran di Smp Kanisius Pakem. *Skripsi*. Jurusan Pendidikan Matematika, FKIP: Universitas Sanata Dharma. [https://repository.usd.ac.id/40849/2/171414051\\_full.pdf](https://repository.usd.ac.id/40849/2/171414051_full.pdf). [diakses pada 15 November 2022].
- Retnoningsih, I. I., Dafik, D., & Hussen, S. (2022). Pewarnaan Titik pada Keluarga Graf Sentripetal. *CGANT JOURNAL OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS*, 3(1). <http://jcgantunej.or.id/index.php/cgant/article/view/75/pdf>. [diakses pada 15 November 2022].
- Wijayanti, E., Dafik, D., & Oktavianingtyas, E. (2018). ANALISIS DUA KONEKSI PELANGI PADA GRAF HASIL OPERASI PERKALIAN KARTESIAN GRAF KIPAS  $F_{(1, 3)}$  DAN GRAF LINGKARAN  $C_n$  SERTA KAITANNYA DENGAN KETERAMPILAN BERPIKIR TINGKAT TINGGI. *Kadikma*, 9(1), 1-8. <https://jurnal.unej.ac.id/index.php/kadikma/article/view/7046/5092>. [diakses pada 27 November 2022].